ALGEBRA

Potenzen Teil 2

mit negativen Exponenten

Trainingsheft

Alle Regeln

Musterbeispiele - Trainingsaufgaben

Datei Nr. 12301

Stand 19. Dezember 2012

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Der alte Text Potenzrechnen wurde völlig neu geschrieben und zu Trainingsheften in mehrere Teile zerlegt. So findet man auch schneller das, was man sucht.

Ferner können diese Texte auf diese Weise besser in innerschulischen Intranets wie „moodle“ verwendet werden.

Zum Themenkreis **Potenzrechnen** gehören diese Texte:

12300 Potenzen mit natürlichem Exponenten

12301 Potenzen mit negativen Exponenten (dieser Text)

12302 Potenzen mit gebrochenen Exponenten
(Hier wird vor allem Wurzelrechnen besprochen.)

12305 Aufgabensammlung 1a (ganze Exponenten) – für Unterricht

12306 Aufgabensammlung 1b (Potenzen von Summen) – für Unterricht

12310 Potenzrechnen (alter Text, alles in einem)

12311 Potenzen wiederholen (zur Prüfungsvorbereitung, Kl. 10 / Abitur)

12321 Lernprogramm
12333 Übung 4

12500 Gruße Aufgabensammlung
12510 Sammlung von Tests
(Diese Aufgaben sind in 12500 nach Themen geordnet)

Zum Themenkreis **Wurzelrechnen** gehören diese Texte:

12201 Quadratwurzeln
12202 Reelle Zahlen
12203 Quadratwurzeln – Aufgabensammlung für den Unterricht

12205 Lernblatt: Wurzeln mit Variablen

12210 n-te Wurzeln
12211 Lernblatt: 3. und 4. Wurzeln

Inhalt

§ 6 **Potenzen mit negativen ganzen Exponenten** 4

6.1 Was bedeuten negative Exponenten 4

6.2 Rechnen mit negativen Exponenten - Musterbeispiele 5

1. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis 5
2. Division von Potenzen mit gleicher Basis 6
3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten 7
4. Division von Potenzen mit gleichem Exponenten 8
5. Potenzieren von Potenzen 9
6. Eine wichtige Folgerung: Kehrwerte 10
7. Potenzen mit verschiedener Basis und verschiedenem Exponenten 11

6.3 Schwierige Zusatzaufgaben 12

Lösungen der Trainingsaufgaben 14 - 23

§ 6 Potenzen mit negativen ganzen Exponenten

6.1 Was bedeuten negative Exponenten? Lesestoff mit wichtigen Erklärungen

Zuerst lernt man, dass Potenzen mit natürlichen Exponenten Abkürzungen für Produkte mit gleichen Faktoren sind. Etwa:

$5^3 = \underbrace{5 \cdot 5 \cdot 5}_{\text{3 gleiche Faktoren}} = 125$ oder $2^6 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{\text{6 gleiche Faktoren}} = 64$.

Daher hat eine Potenz der Form 2^{-4} zunächst keine Bedeutung, denn was soll ein Produkt aus „minus 4 gleichen Faktoren“ sein?!

Man hat jedoch Potenzen wie 2^{-4} durch folgende Rechnungen einen Sinn gegeben:

Für die Division von Potenzen mit gleicher Basis gibt es diese Regel: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ (2)

Ist **n > m**, dann entspricht diese Regel dem Kürzen: $\frac{2^7}{2^3} = \frac{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{\cancel{2 \cdot 2 \cdot 2}} = 2^{7-3} = 2^4$

Dadurch werden die 7 Faktoren (2) um 3 auf 4 reduziert.

Das heißt: Division bedeutet hier eine Subtraktion: Zähler-Exponent minus Nenner-Exponent.

Noch ein Beispiel: $\frac{5^{11}}{5^5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{\cancel{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}} = 5^{11-5} = 5^6$

Ist aber **n < m**, wie in $\frac{2^2}{2^6}$, dann kann man zweierlei tun:

Konsequentes Anwenden der Regel (2) ergibt einen negativen Exponenten: $\frac{2^2}{2^6} = 2^{2-6} = 2^{-4}$

Rechnen ohne Potenzen aber mit Kürzen, liefert: $\frac{2^2}{2^6} = \frac{\cancel{2 \cdot 2}}{\cancel{2 \cdot 2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^4}$

Da verschiedene Rechenwege doch zum selben Ergebnis führen sollen, hat man festgelegt, dass 2^{-4} gleich $\frac{1}{2^4}$ sein soll.

$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Weitere Beispiele: $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ $9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}$ $7^{-1} = \frac{1}{7^1} = \frac{1}{7}$

Definition: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für $n \in \mathbb{N}$

a^{-n} ist also der Kehrwert von a^n

6.2 Rechnen mit negativen Exponenten - Musterbeispiele

Die Potenzgesetze gelten auch für negative ganze Hochzahlen

Um das zu verstehen, lösen wir einige Aufgaben auf zweierlei Weisen:

Links: Rechnung mit negativen Exponenten und den üblichen Potenzgesetzen	Rechts: Zuerst auf positive Exponenten umrechnen und dann Potenzgesetze anwenden

1. Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Regel 1: $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

a) $4^{-2} \cdot 4^{-3} = 4^{-2+(-3)} = \boxed{4^{-5}}$ ⟺ $4^{-2} \cdot 4^{-3} = \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4^5} = \boxed{4^{-5}}$

b) $5^7 \cdot 5^{-3} = 5^{7+(-3)} = 5^{7-3} = \boxed{5^4}$ ⟺ $5^7 \cdot 5^{-3} = 5^7 \cdot \frac{1}{5^3} = \frac{5^7}{5^3} = 5^{7-3} = \boxed{5^4}$

Die direkte Anwendung der Formel $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten umrechnet und dann nur noch mit positiven Exponenten arbeitet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen. wie es die nächsten Beispiele zeigen:

c) $4^{-3} \cdot 4^7 = 4^{-3+7} = 4^4$

d) $7^{-2} \cdot 7^{-6} = 7^{-2-6} = 7^{-8} \quad \left[= \frac{1}{7^8} \right]$

e) $2^{-12} \cdot 2^{11} = 2^{-12+11} = 2^{-1} \quad \left[= \frac{1}{2} \right]$

f) $18^{-2} \cdot 18^{-3} = 18^{-5} \quad \left[= \frac{1}{18^5} \right]$

Die Frage, ob man das Ergebnis als Potenz mit negativem Exponenten schreiben soll oder als Bruch mit positivem Exponenten kann man so nicht beantworten. Das muss aus der Aufgabe hervorgehen. Und wenn dort nichts steht, kann man ja beides aufschreiben.

Trainingsaufgabe 1

a) 2^{-4} b) 5^{-3} c) 9^{-2} d) 7^{-1}

e) 2^{-6} f) 3^{-3} g) 4^{-4} h) 8^{-3}

Trainingsaufgabe 2

a) $4^{-2} \cdot 4^{-3}$ b) $5^7 \cdot 5^{-3}$ c) $2^{12} \cdot 2^{-7}$ d) $3^{-15} \cdot 3^{12}$

e) $3^{-15} \cdot 3^6$ f) $5^{-2} \cdot 5^{-8}$ g) $2^4 \cdot 2^{-8}$; h) $7^3 \cdot 7^{-7} \cdot 7^{-12} \cdot 7^5$

2. Division von Potenzen mit gleicher Basis

Regel 2: $\frac{a^n}{a^m} = a^{m-n}$

Links: Rechnung mit negativen Exponenten und den üblichen Potenzgesetzen	Rechts: Zuerst auf positive Exponenten umrechnen und dann Potenzgesetze anwenden

a) $\frac{3^{-8}}{3^{-12}} = 3^{(-8)-(-12)} = 3^{-8+12} = \boxed{3^4}$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{3^{-8}}{3^{-12}} = \frac{\frac{1}{3^8}}{\frac{1}{3^{12}}} = \frac{1}{3^8} \cdot \frac{3^{12}}{1} = \frac{3^{12}}{3^8} = 3^{12-8} = \boxed{3^4} = 81$

b) $\frac{2^3}{2^{-7}} = 2^{3-(-7)} = 2^{3+7} = \boxed{2^{10}}$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{2^3}{2^{-7}} = \frac{2^3}{\frac{1}{2^7}} = 2^3 \cdot 2^7 = \boxed{2^{10}} = 1024$

c) $\frac{5^{-13}}{5^7} = 5^{-13-7} = \boxed{5^{-20}} = \frac{1}{5^{20}}$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{5^{-13}}{5^7} = \frac{1}{5^{13} \cdot 5^7} = \frac{1}{5^{20}} = \boxed{5^{-20}}$

d) $\frac{7^{-8}}{7^{-3}} = 7^{-8-(-3)} = 7^{-8+3} = \boxed{7^{-5}} = \frac{1}{7^5}$ $\Longleftrightarrow$ $\frac{7^{-8}}{7^{-3}} = \frac{\frac{1}{7^8}}{\frac{1}{7^3}} = \frac{7^3}{7^8} = 7^{3-8} = \boxed{7^{-5}} = \frac{1}{7^5}$

Die direkte Anwendung der Regel $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten beseitigt und dann nur noch mit positiven Exponenten rechnet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen, wie es die nächsten Beispiele zeigen:

e) $\frac{2^{-5}}{2^{-3}} = 2^{-5-(-3)} = 2^{-5+3} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

f) $\frac{3^{-5}}{3^{-7}} = 3^{-5-(-7)} = 3^{-5+7} = 3^2 = 9$

g) $\frac{2^4}{2^{-3}} = 2^{4-(-3)} = 2^{4+3} = 2^7$

h) $\frac{2^{-7}}{2^3} = 2^{-7-3} = 2^{-10} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$

Trainingsaufgabe 3

a) $\frac{4^{-2}}{4^{-5}}$ b) $\frac{3^2}{3^{-7}}$; c) $\frac{2^{-8}}{2^2}$; d) $\frac{2^3}{2^{-7}}$

e) $\frac{5^{-13}}{5^{-8}}$ f) $\frac{7^8}{7^4}$ g) $\frac{3^{-8}}{3^{-12}}$ h) $\frac{2^3}{2^{-5} \cdot 2^{13}}$

3. Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten

Regel 3: $\boxed{a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n}$

Links: Rechnung mit negativen Exponenten und den üblichen Potenzgesetzen	Rechts: Zuerst auf positive Exponenten umrechnen und dann Potenzgesetze anwenden

a) $3^{-2} \cdot 6^{-2} = (3 \cdot 6)^{-2} = \boxed{18^{-2}} = \frac{1}{18^2} \Longleftrightarrow 3^{-2} \cdot 6^{-2} = \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{6^2} = \frac{1}{(3 \cdot 6)^2} = (3 \cdot 6)^{-2} = \boxed{18^{-2}}$

Die direkte Anwendung des Gesetzes $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten beseitigt und dann nur noch mit positiven Exponenten rechnet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen, wie es die nächsten Beispiele zeigen:

b) $5^{-6} \cdot 2^{-6} = 10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1.000.000} = 0{,}000.001$

c) $4^{-1} \cdot 8^{-1} = 32^{-1} = \frac{1}{32}$

d) $7^{-2} \cdot 3^{-2} = 21^{-3} = \frac{1}{21^3}$

Trainingsaufgabe 4

a) $2^4 \cdot 3^4$ b) $4^3 \cdot 3^3$ c) $2^{-4} \cdot 5^{-4}$ d) $3^{-2} \cdot 6^{-2}$

e) $5^{-3} \cdot 2^{-3}$ f) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 8^{-3}$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{16}{27}\right)^{-2}$ h) $9^{-5} \cdot 2^{-5} \cdot 3^3 \cdot 6^3$

4. Division von Potenzen mit gleichem Exponenten

Regel 4: $\boxed{\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n}$

Links: Rechnung mit negativen Exponenten und den üblichen Potenzgesetzen	Rechts: Zuerst auf positive Exponenten umrechnen und dann Potenzgesetze anwenden

a) $\frac{12^{-5}}{3^{-5}} = \left(\frac{12}{3}\right)^{-5} = 4^{-5} = \boxed{\frac{1}{4^5}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{12^{-5}}{3^{-5}} = \frac{\frac{1}{12^5}}{\frac{1}{3^5}} = \frac{1}{12^5} \cdot \frac{3^5}{1} = \left(\frac{3}{12}\right)^5 = \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \boxed{\frac{1}{4^5}}$

Die direkte Anwendung der Regel $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten beseitigt und dann nur noch mit positiven Exponenten rechnet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen, wie es die nächsten Beispiele zeigen:

b) $\frac{30^{-2}}{15^{-2}} = \left(\frac{30}{15}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

c) $\frac{4^{-3}}{20^{-3}} = \left(\frac{4}{20}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \frac{1^{-3}}{5^{-3}} = \frac{1}{\frac{1}{5^3}} = 5^3$

d) $\frac{18^{-5}}{12^{-5}} = \left(\frac{18}{12}\right)^{-5} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5} = \frac{3^{-5}}{2^{-5}} = \frac{\frac{1}{3^5}}{\frac{1}{2^5}} = \frac{1}{3^5} \cdot \frac{2^5}{2} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{324}$

e) $\frac{15^{-3}}{5^{-3}} = \left(\frac{15}{5}\right)^{-3} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

Trainingsaufgabe 5

a) $\frac{4^{-3}}{2^{-3}}$ b) $\frac{28^{-2}}{7^{-2}}$ c) $\frac{3^{-7}}{21^{-7}}$ d) $\frac{3^{-2} \cdot 20^{-3}}{12^{-2} \cdot 5^{-3}}$

e) $\frac{3^{-5}}{12^{-5}}$ f) $\frac{24^5}{8^5}$ g) $\frac{6^{-3}}{3^{-3}}$ h) $\frac{9^{-5}}{18^{-5}}$

5. Potenzieren von Potenzen

Regel 5: $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$

Links: Rechnung mit negativen Exponenten und den üblichen Potenzgesetzen	Rechts: Zuerst auf positive Exponenten umrechnen und dann Potenzgesetze anwenden

a) $\left(3^{-2}\right)^3 = 3^{-2 \cdot 3} = \boxed{3^{-6}} = \frac{1}{3^6} \Longleftrightarrow \left(3^{-2}\right)^3 = \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 = \frac{1^3}{\left(3^2\right)^3} = \frac{1}{3^6}$

b) $\left(5^2\right)^{-4} = 5^{2 \cdot (-4)} = \boxed{5^{-8}} = \frac{1}{5^8} \Longleftrightarrow \left(5^2\right)^{-4} = \frac{1}{\left(5^2\right)^4} = \frac{1}{5^8}$

c) $\left(2^{-4}\right)^{-3} = 2^{12} \Longleftrightarrow \left(2^{-4}\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2^4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2^4}\right)^3} = \frac{1}{\frac{1}{2^{12}}} = 2^{12}$

Die direkte Anwendung der Regel $\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$ liefert also dasselbe Ergebnis, wie wenn man zuerst die negativen Exponenten beseitigt und dann nur noch mit positiven Exponenten rechnet.

Daher kann man unbedenklich so rechnen, wie es die nächsten Beispiele zeigen:

d) $\left(12^{-3}\right)^{-2} = 12^6$

e) $\left(8^{-3}\right)^2 = 8^{-6} = \frac{1}{8^6}$

f) $\left(5^3\right)^{-1} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$

g) $\left(\left(2^{-3}\right)^{-2}\right)^{-3} = 2^{(-3)\cdot(-2)\cdot(-3)} = 2^{-18} = \frac{1}{2^{18}}$

Trainingsaufgabe 6

a) $\left(2^3\right)^4$ b) $\left(5^2\right)^{-4}$ c) $\left(2^{-4}\right)^{-3}$ d) $\left(a^3\right)^0$

e) $\left(3^{-2}\right)^3$ f) $\left(5^{-1}\right)^3$ g) $\left(4^{-3}\right)^{-2}$ h) $\left(3^{-2}\right)^{-5}$